Fractions rationnelles avec multiplicateurs entiers ou rationnels

entier = élément de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathcal{O}_K$ avec K corps quadratique imaginaire
= élément d'un sous-anneau discret A de $\mathbb{C}$

rationnel = élément d'un corps de nombres K

Motivation. Soit $f \in \mathbb{Q}(z)$ de degré $d \geq 2$. $\mathrm{Preper}(f) = \bigcup_{m<n} \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : f^{\circ m}(z) = f^{\circ n}(z)\} \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$

Proposition. Pour tout corps de nombres K, $|\mathrm{Preper}(f) \cap \mathbb{P}^1(K)| < +\infty$.
En fait, $\forall D > 0$, $|\{z \in \mathrm{Preper}(f) : \deg_{\mathbb{Q}}(z) \leq D\}| < +\infty$.

Conjecture (Morton & Silverman). $|\{z \in \mathrm{Preper}(f) : \deg_{\mathbb{Q}}(z) \leq D\}| \leq \underbrace{C(d, D)}_{\text{indépendante de } f}$

→ Résultats conditionnels dus à Looper
→ Largement ouverte

Question. Existe-t-il $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $c \in \mathbb{Q}$, $f_c(z) = z^2 + c$ n'a aucun point périodique dans $\mathbb{Q}$ avec période $\geq N$?

Question. Qu'en est-il des multiplicateurs ?
→ Bien définie dans le cadre de la dynamique complexe

Exemple. $f(z) = z^d$ $(d \geq 2)$. Alors $\underbrace{\Lambda_f}_{\text{ensemble des multiplicateurs}} = \{0\} \cup \{d^n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{Z}$.

Définition. On dit que $f \in \mathbb{C}(z)$ de degré $d \geq 2$ est exceptionnelle si
- f est une application puissance (AP) : f est conjuguée à $z^{\pm d}$
- ou f est une application de Tchebychev (AT) : f est conjuguée à $\pm T_d$ où $T_d(z + z^{-1}) = z^d + z^{-d}$
- ou f est un exemple de Lattès :
  il existe un tore $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$ (Λ réseau de $\mathbb{C}$), $L : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ holomorphe et $p : \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ holomorphe non constante tels que

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{T} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[r, "f"'] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

De plus, si $\deg(p) = 2$ et $L : z + \Lambda \mapsto az + b + \Lambda$ avec $a \in \mathbb{Z}$, on dit que f est un exemple de Lattès flexible (LF).

Proposition. Soit $f \in \mathbb{C}(z)$ exceptionnelle. Alors il existe un sous-anneau discret A de $\mathbb{C}$ tel que $\Lambda_f \subset A$. De plus, si f est une AP, une AT ou un LF, alors $\Lambda_f \subset \mathbb{Z}$.

Conjecture (Milnor). Soit $f \in \mathbb{C}(z)$ de degré $d \geq 2$ telle que $\Lambda_f \subset \mathbb{Z}$. Alors f est une AP, une AT ou un LF.

Théorème (Ji & Xie). Soient A un sous-anneau discret de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}(z)$ de degré $d \geq 2$ telle que $\Lambda_f \subset A$.
Alors f est exceptionnelle.

Corollaire. La conjecture de Milnor est vraie.

Les sous-anneaux discrets de $\mathbb{C}$ sont précisément $\mathbb{Z}$ et les $\mathcal{O}_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$ avec $\underbrace{K \text{ corps quadratique imaginaire}}_{K = \mathbb{Q}(i\sqrt{D}) \text{ avec } D \in \mathbb{N}^*}$.

Théorème (H.). Soient K un corps de nombres et $f \in \mathbb{C}(z)$ de degré $d \geq 2$ telle que $\Lambda_f \subset K$.
Alors f est exceptionnelle.